Concours CAE session 2015

Composition : Mathématiques 2 (statistiques, probabilités)

Durée : 2 Heures

Dans ce sujet, il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la clarté du raisonnement dans la notation. Les calculatrices ne sont pas autorisées. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels. Les deux (2) problèmes sont indépendants.

Problème N°1 :

On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires continues indépendantes, de fonctions densités de probabilités respectives u et v, alors U+V est une variable aléatoire continue dont la fonction densité de probabilité w est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, v(x-t)\, dt$$

On notera, F_U la fonction de répartition de U et F_V celle de V et ainsi de suite pour les différentes variables aléatoires rencontrées dans ce problème.

On dira qu'une variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre λ (réel strictement positif), si sa densité f, nulle pour tout réel négatif, est définie par :

$$\forall x \geq 0, \qquad f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$$

1) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes continues de même loi exponentielle de paramètre λ.

a) Quelle est la densité de la variable $(-Y)$?

b) Montrer que $X - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad h(z) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |z|}$$

c) En déduire que $|X - Y|$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.

2) Trois personnes A, B, et C se rendent au même instant dans un centre d'appels pour téléphoner. Il n'y a que deux cabines téléphoniques que prennent A et B, tandis que C attend. On suppose que les durées de communication téléphonique de chacune, notées X_A, X_B, X_C, sont des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ.

a) Vérifier que C sort le dernier du centre d'appels si et seulement si l'événement ($|X_A - X_B| < X_C$) est réalisé.

b) Montrer que la variable aléatoire $|X_A - X_B| - X_C$ admet pour densité la fonction h définie ci-dessus. En déduire la probabilité pour que C sorte le dernier du centre.

3) **a)** Soient Z et T deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs α et β , strictement positifs et différents. Déterminer la loi de la variable $Z + T$.

b) Soit T_C la variable aléatoire égale au temps total passé par C au centre d'appels. Déterminer la loi de la variable $M = \min(X_A , X_B)$ et en déduire la loi de T_C .

Problème N°2 :

1) Deux ateliers de l'entreprise « NIAN S.A. » fabriquent des lampes fluorescentes. L'atelier n°1, mieux équipé, a une cadence de production deux fois plus rapide que l'atelier n°2. Le pourcentage de lampes défectueuses est de 2% pour l'atelier n°1 et de 3% pour l'atelier n°2. On prélève au hasard une lampe de l'ensemble de la production.

a) Calculer la probabilité d'avoir une lampe défectueuse.

b) Calculer la probabilité qu'une lampe provienne de l'atelier n°1 sachant qu'elle est défectueuse.

Les lampes de « NIAN S.A. » sont soumises à un contrôle, mais le mécanisme de contrôle n'est pas totalement fiable. En effet, si une lampe est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 90%. Si elle est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de 80%.

c) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait une erreur lors du contrôle d'une lampe ?

d) Une lampe a été acceptée à l'issue du contrôle. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

2) L'entreprise « NIAN S.A » a constaté que, pour ses lampes, le nombre de commandes d'un mois dépend du mois précédent, mais non des mois antérieurs. De plus, elle a constaté que :

- si pour un mois donné, le nombre de commandes est supérieur à 100.000, la probabilité pour qu'il soit supérieur à 100.000 le mois suivant est de **0,7.**
- si pour un mois donné, le nombre de commandes est inférieur ou égal à 100.000, la probabilité pour qu'il soit inférieur ou égal à 100.000 le mois suivant est de **0,6.**

a) Sachant que le nombre de commandes est supérieur à 100.000 en janvier, calculer la probabilité qu'il soit supérieur à 100.000 les 2 mois suivants.

b) Sachant que le nombre de commandes est inférieur ou égal à 100.000 en janvier, calculer la probabilité qu'il soit supérieur à 100.000 en mars de la même année.